Study on
the First Wave Equation

2004.08.04

㈜울텍 부설 초음파 응용연구소

개념 정리

- 편 미분 방정식 :*U (x ,y ,z ,t)*
- 자연계에서 변화하는 대상이 무엇이냐?

$$\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x}$$

- 응용 분야:유체역학,고체역학,열전달,
  전자기학,양자 역학

파동 방정식

열전도 방정식

Laplace 방정식

편미분 방정식

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta^2 u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta^2 u$$

$$\Delta^2 u = 0$$

파동 방정식

- 1차원 파동 방정식
  - 현의 진동
  - 탄성파,음파

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 2차원 파동 방정식
  - 원형박막(북) 진동
  - 전화기,고막

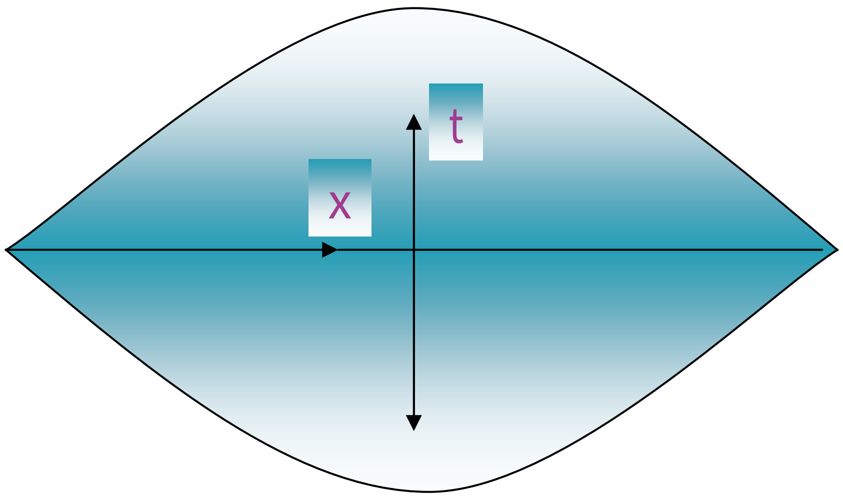
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

- 3차원 파동 방정식
  - 부피를 가지는 물체진동

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

1차원 파동 방정식의 모델링

❖ 기타 줄의 진동을 편 미분 방정식으로 표현



Modeling

Ⅰ 기타 줄은 수직으로만 진동

Ⅱ 휨에 대한 저항은 무시

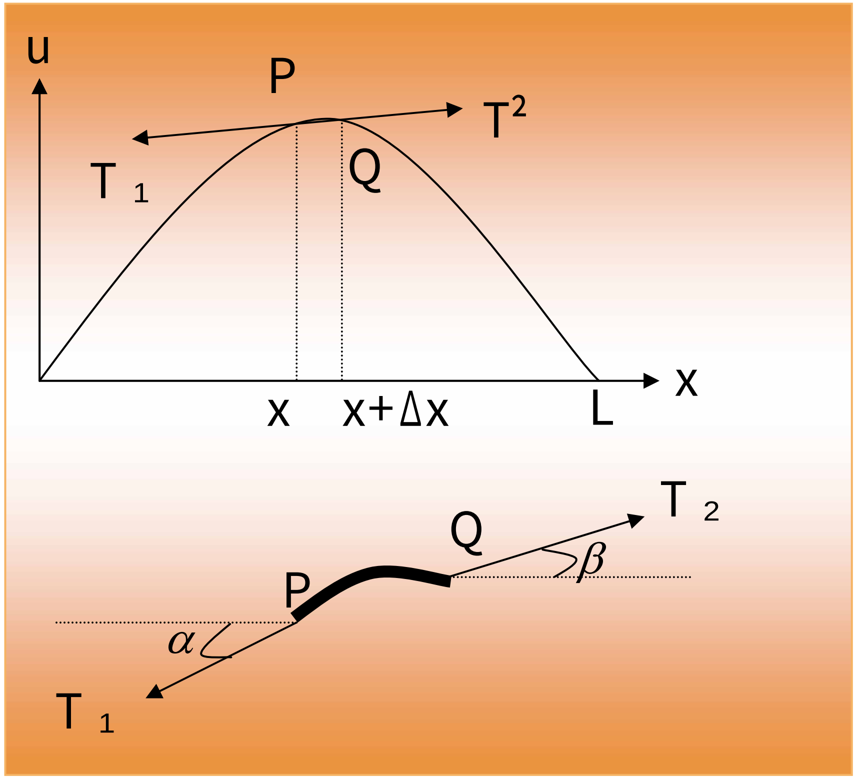
Ⅲ 단위 길이당 줄의 무게는 같다

Ⅳ 중력은 무시

기타 줄이 진동 할 때 그 변위는
각 점 x와 시간 t에 따라서 다르므로
변수가 2개인 편 미분 함수로 해석

모델링 수식화

❖ 기타 줄의 진동에서 어느 한 순간을 표현



미소구간 x, x+ Δx 양쪽으로 잡아 당기는 힘은 장력 T1,T2

① 수평성분

$T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T$

② 수직성분

$F = T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = ma$

질량 $m = \rho\Delta x$ (ρ:밀도 ,Δx:길이)

가속도 $a = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ (u : 변위)

그러므로

$$F = T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

1차원 파동 방정식

$T_2 \cos\beta - T_1 \cos\alpha = T$ ---------- ①

$T_2 \sin\beta - T_1 \sin\alpha = \rho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ --- ②

1식으로 2식을 나누면

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Tanα,tanβ 는 x점과 x+Δx에서의 기울기 즉 미분

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} = \frac{\rho\Delta x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Δx로 양변을 나누면

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}\right] = \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- Δx-> "0"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, c^2 = \frac{\rho}{T}(> 0)$$

1차원 파동 방정식 풀기

- 변수 분리 법을 이용

① 해를 x만의 함수,t만의 함수라고 가정

② X의 상 미분 방정식,t의 상 미분 방정식

③ 2개의 상 미분 방정식의 해를 구하고

④ 구한 2개의 해를 곱하여 해결

2개의 상 미분 방정식으로 나누기

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, c^2 = \frac{\rho}{T} (> 0)$$

X만의 함수: F(x) ,t만의 함수 : G(t)

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$FG'' = c^2 F'' G$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{G''}{G} = \frac{F''}{F} = k$$

2개의 상 미분 방정식으로 분리
x만의 상 미분, t만의 상미분

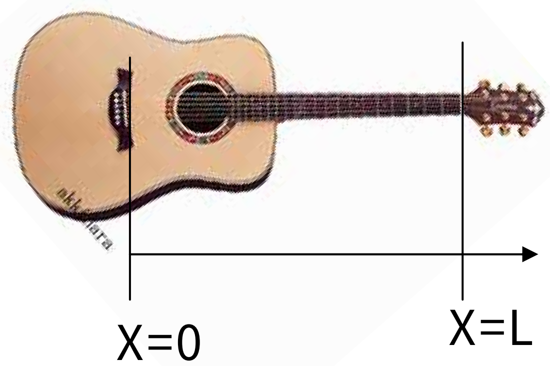
$$F'' - kF = 0$$

$$G'' - c^2 kG = 0$$

상수 계수를 가지는 2계 제차 미분

경계 조건 ,초기 조건

경계 조건



$$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

초기 조건

- ✓ 초기 변위
- ✓ 초기 속도

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

경계 조건 만족 시키기

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$u(0,t) = 0$

$u(L,t) = 0$

$F'' - kF = 0$

$G'' - c^2 kG = 0$

$u(0,t) = F(0)G(t) = 0$

$u(L,t) = F(L)G(t) = 0$

$G(t) = 0$이면 항상 "0"

$G(t) \neq 0$

$F(0) = 0, F(L) = 0$

$F'' - kF = 0$

$k = 0, k < 0, k > 0$

$k < 0, k = -p^2$

$F'' + p^2 F = 0$

$F(x) = A\cos px + B\sin px$

$F(0) = A = 0, F(L) = B\sin pL = 0$

$\therefore B \neq 0, \sin pL = 0, pL = n\pi$

$\therefore p = \frac{n\pi}{L}, A = 0$

$F_n(x) = B\sin\frac{n\pi}{L}x \, (n = 1, 2, 3 \ldots .)$

F(x), G(t) 곱하기

$$u(x,t) = F(x)G(t)$$

$$F'' - kF = 0$$

$$G'' - c^2kG = 0$$

$$k = -p^2 = -(\tfrac{n\pi}{L})^2$$

$$G'' + (\tfrac{cn\pi}{L})^2 G = 0$$

$$(\tfrac{cn\pi}{L})^2 = \lambda_n{}^2$$

$$G'' + \lambda_n{}^2 G = 0$$

일반해

$$G_n(t) = B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t$$

$$F_n(x) = B\sin\tfrac{n\pi}{L}x \quad (n = 1,2,3.....)$$

$$G_n(t) = B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t$$

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t)$$

$$= (B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t) B \sin\frac{n\pi}{L}x$$

B_nB, B_n^*B : constant

Let : $B_nB = B_n$, $B_n^*B = B_n^*$

$$u_n(x,t) = (B_n \cos\lambda_n t + B_n^* \sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

초기조건 만족 시키기

$$u_n(x,t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

FourierSer ies

$$B_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(x) \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$\tfrac{\partial u}{\partial t}\Big]_{t=0} = g(x)$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-B_n \sin \lambda_n t + B_n^* \cos \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x \right|_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \lambda_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

FourierSer ies

$$B_n^* \lambda_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L g(x) \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$F'' - kF = 0$$

$$G'' - c^2 kG = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}_{t=0} = g(x)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, c^2 = \frac{\rho}{T} (> 0)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$\begin{pmatrix} B_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(x) \frac{n\pi}{L} x dx \\ B_n^* \lambda_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L g(x) \frac{n\pi}{L} x dx \end{pmatrix}, (\lambda_n = \frac{cn\pi}{L})$$

Standing wave

$$u(x,0) = f(x)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$$

초기속도 $g(x) = 0$인경우

$$B_n^* = 0$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos \lambda_n t \sin \frac{n\pi}{L} x$$

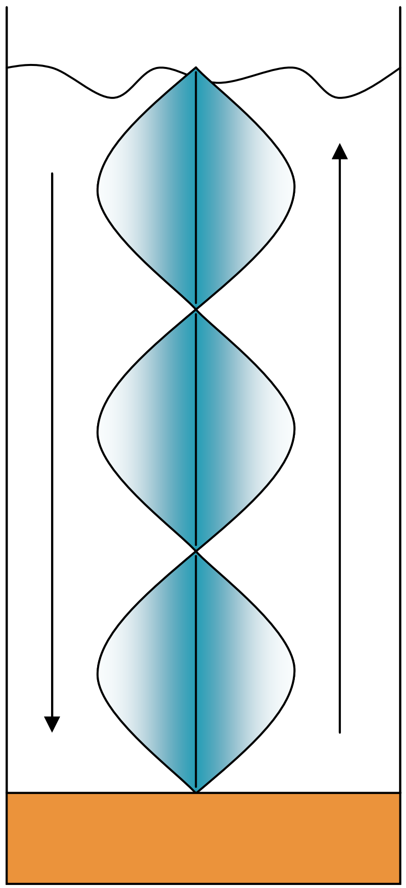
$$\begin{pmatrix} B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \frac{n\pi}{L} xdx \\ B_n^* \lambda_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \frac{n\pi}{L} xdx = 0 \end{pmatrix}, (\lambda_n = \frac{cn\pi}{L})$$

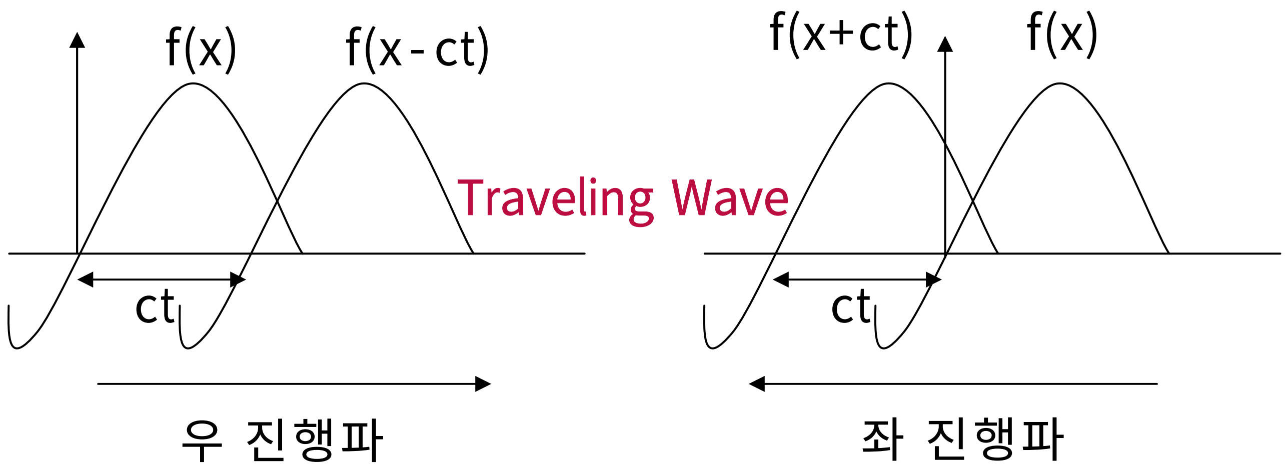
삼각함수의 가감법을 이용

$$\frac{1}{2}\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\} + \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}\right]$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}$$

Standing Wave





$$u(x,t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}$$